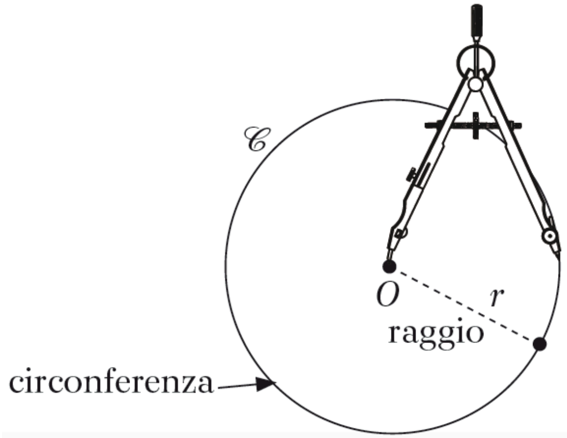
# Circonferenza e cerchio

# Circonferenza e cerchio

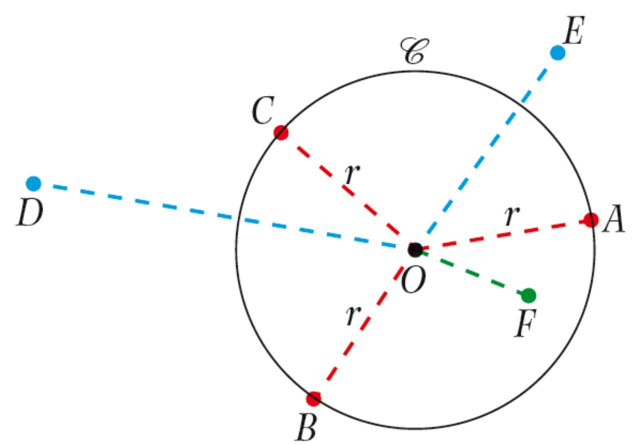
La **circonferenza** $\mathcal{C}$, che si può tracciare con un compasso, è una **linea curva chiusa** costituita dall'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto del piano stesso, detto **centro** ***O*.**

La distanza di $O$ da un punto qualsiasi di $\mathcal{C}$ è detta **raggio** e si indica con ***r***.




Un punto qualsiasi del piano su cui giace $\mathcal{C}$ può trovarsi:

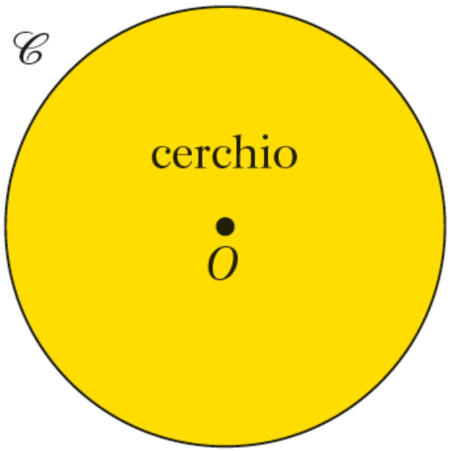
- **esterno** alla circonferenza, se la sua distanza da $O$ è maggiore del raggio (punti $D$, $E$);
- **appartenente** alla circonferenza, se la sua distanza da $O$ è uguale al raggio (punti $A$, $B$, $C$);
- **interno** alla circonferenza, se la sua distanza da $O$ è minore del raggio (punto $F$).



# Circonferenza e cerchio

Una circonferenza $\mathcal{C}$ divide il piano su cui giace in due parti:

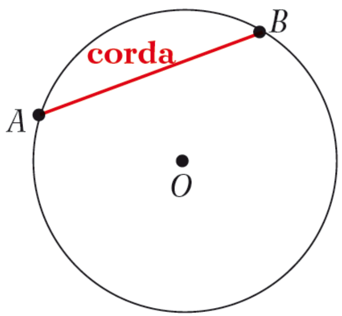
- una costituita dai punti esterni a $\mathcal{C}$;
- l'altra costituita dai punti appartenenti e interni a $\mathcal{C}$ detta **cerchio**.



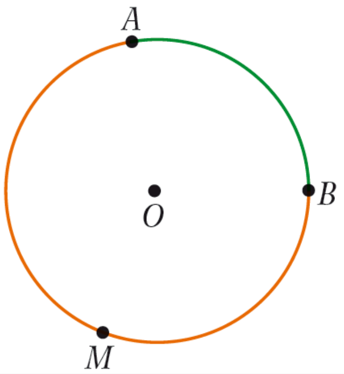

**Un cerchio è la parte di piano costituita da una circonferenza e da tutti i punti interni a essa.**

# La circonferenza e le sue parti

La **corda** è il segmento che ha per estremi due punti qualsiasi della circonferenza.

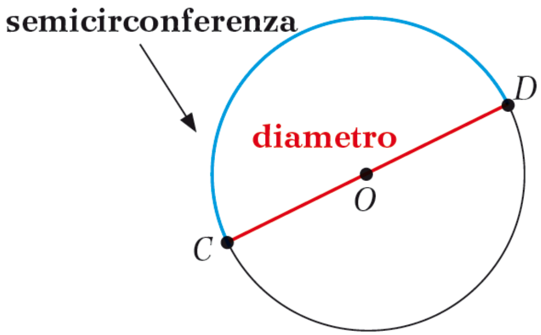



L'**arco** è la parte di circonferenza compresa fra due punti della circonferenza stessa. I punti *A* e *B* sono gli estremi dell'arco che si indica con $\overset{\frown}{AB}$ .




Il **diametro** è la corda passante per il centro. Si indica con ***d*** ed è il doppio del raggio.

Se i punti *C* e *D* sono gli estremi di un diametro, ogni arco prende il nome di **semicirconferenza**.



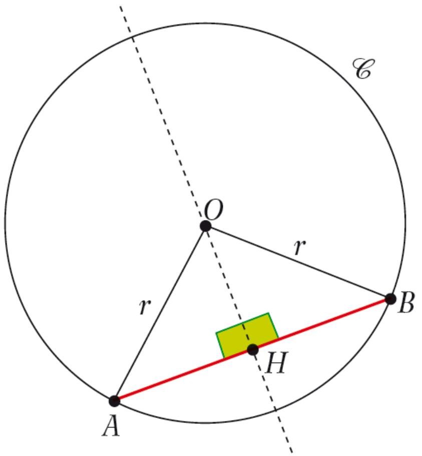
# La circonferenza e le sue parti

## PROPRIETÀ DI ARCHI E CORDE

La **distanza della corda dal centro** è il segmento di perpendicolare condotto dal centro di una circonferenza a una corda che la divide in due segmenti congruenti.

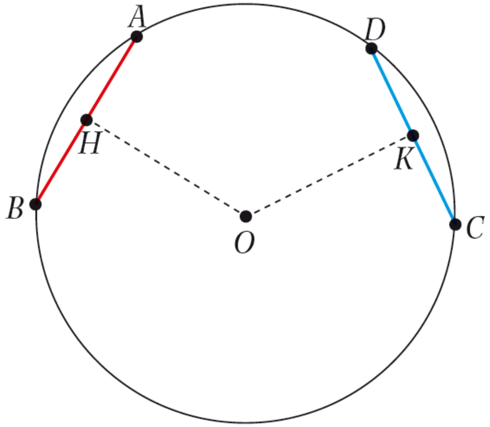
***AH* = *HB*** ***OA* = *OB* = *r***

Il segmento ***OH*** è la **distanza della corda *AB* dal centro *O***.




In una circonferenza archi congruenti sottendono corde congruenti e viceversa corde congruenti sono sottese da archi congruenti.

Gli archi *AB* e *CD* sono congruenti e le corde *AB* e *CD* sono congruenti.



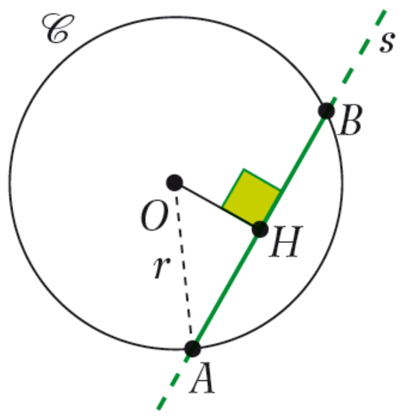

Se due corde di una circonferenza sono congruenti, anche le loro distanze dal centro sono congruenti.

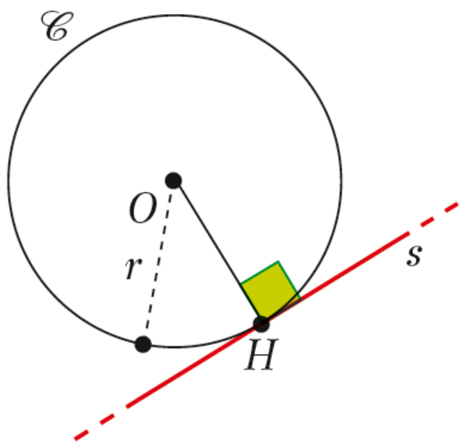
Le perpendicolari *OH* e *OK* sono congruenti.

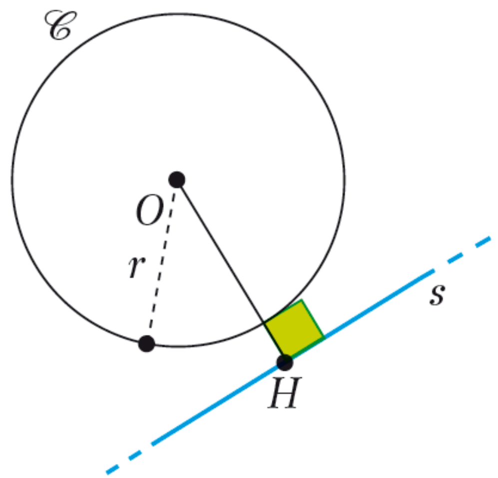
# Circonferenza e rette nel piano

## POSIZIONI RECIPROCHE DI UNA RETTA E DI UNA CIRCONFERENZA

- Retta $s$ **secante**. La retta ha due punti in comune con la circonferenza $\mathcal{C}$ :
  $\boldsymbol{OH < r}$
  $\boldsymbol{\mathcal{C} \cap s = \{A, B\}}$
- Retta $s$ **tangente**. La retta interseca la circonferenza $\mathcal{C}$ in due punti coincidenti:
  $\boldsymbol{OH = r}$
  $\boldsymbol{\mathcal{C} \cap s = \{H\}}$
- Retta $s$ **esterna**. La retta non ha alcun punto in comune con la circonferenza $\mathcal{C}$:
  $\boldsymbol{OH > r}$
  $\boldsymbol{\mathcal{C} \cap s = \emptyset}$





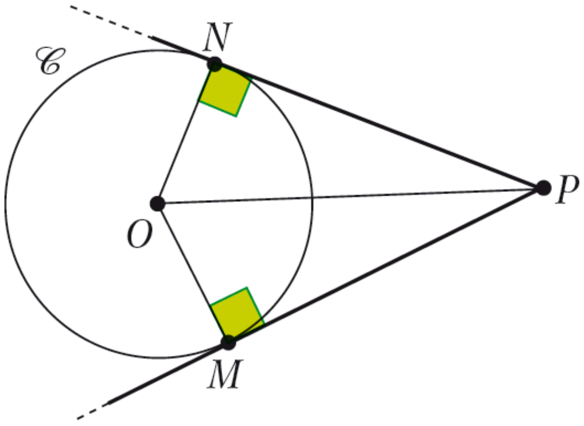

Lattes

# Circonferenza e rette nel piano

Consideriamo una circonferenza $\mathcal{C}$ e un punto $P$ esterno a essa.

Tracciando dal punto $P$, esterno alla circonferenza, le due tangenti alla circonferenza stessa si ottengono due **segmenti di tangenza congruenti**:

***PN = PM***

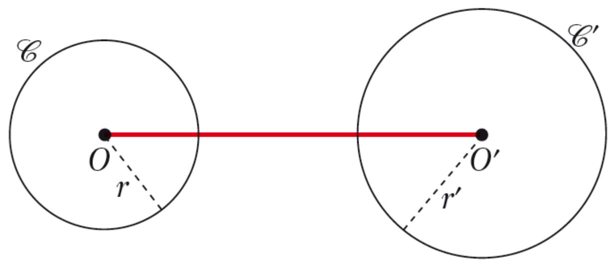


# Circonferenza e rette nel piano

## POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE CIRCONFERENZE

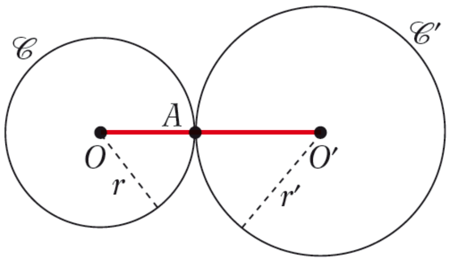
Le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono **esterne** una all'altra, non hanno alcun punto in comune. La distanza fra i centri *O* e *O'* è maggiore della somma dei raggi *r* e *r'*:

$$\boldsymbol{OO' > r' + r}$$



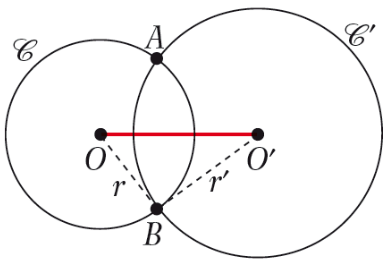

Le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono **tangenti esternamente**, hanno un punto *A* in comune e tutti i punti di una sono esterni all'altra. La distanza fra i centri *O* e *O'* è uguale alla somma dei raggi *r* e *r'*:

$$\boldsymbol{OO' = r' + r}$$




Le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono **secanti**, hanno due punti *A* e *B* in comune. La distanza fra i centri *O* e *O'* è minore della somma dei raggi *r* e *r'* e maggiore della loro differenza:

$$\boldsymbol{r' - r < OO' < r' + r}$$

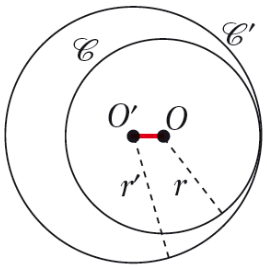


# Circonferenza e rette nel piano

## POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE CIRCONFERENZE

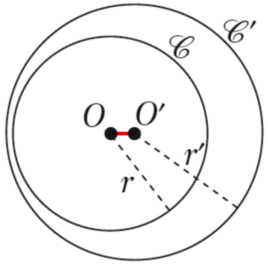
Le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono **tangenti internamente**, hanno un punto in comune e tutti i punti di una sono interni all'altra. La distanza fra i centri $O$ e $O'$ è uguale alla differenza dei raggi $r'$ e $r$:

$$OO' = r' - r$$



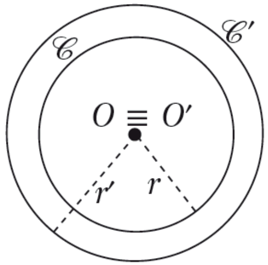

La circonferenza $\mathcal{C}$ è **interna** alla circonferenza $\mathcal{C}'$, non hanno alcun punto in comune e tutti i punti di una sono interni all'altra. La distanza fra i centri $O$ e $O'$ è minore della differenza dei raggi $r'$ e $r$:

$$OO' < r' - r$$




Le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono **concentriche**. Il centro $O$ di $\mathcal{C}$ coincide con il centro $O'$ di $\mathcal{C}'$:

$O \equiv O'$ quindi $OO' = 0$



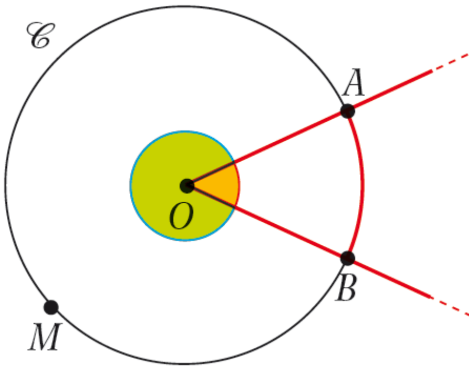


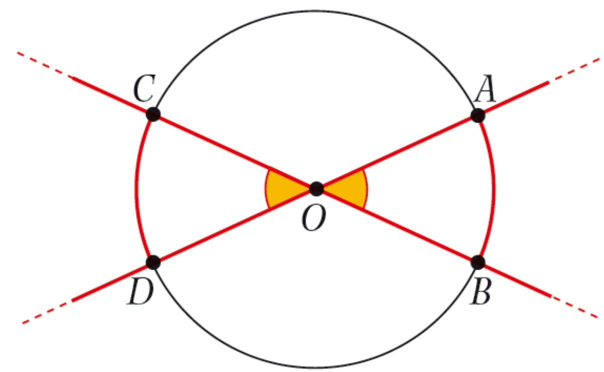
Lattes

# Angoli al centro e angoli alla circonferenza

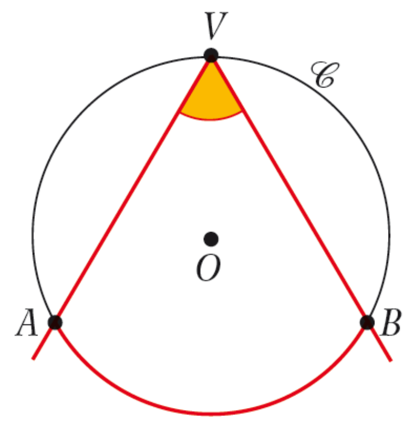
Un **angolo al centro** di una circonferenza ha il vertice *V* nel centro *O* della circonferenza $\mathcal{C}$ e i lati che tagliano la circonferenza in due punti *A* e *B*.

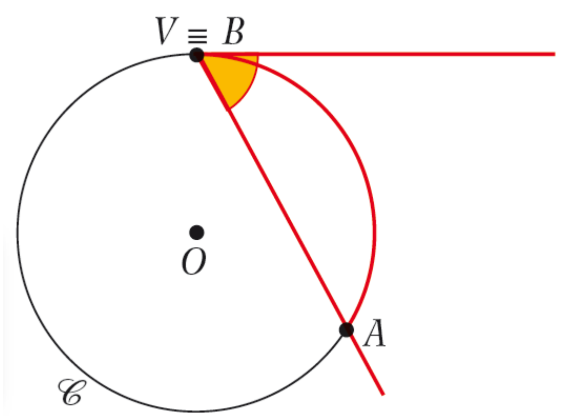
In una stessa circonferenza o in circonferenze congruenti angoli al centro congruenti insistono su archi congruenti e viceversa.




Un **angolo alla circonferenza** è ogni angolo che ha il vertice *V* sulla circonferenza $\mathcal{C}$ e i lati entrambi secanti oppure uno secante e l'altro tangente alla circonferenza.



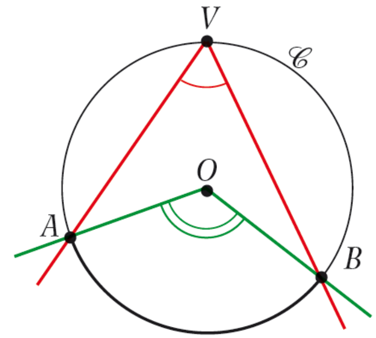



# Angoli al centro e angoli alla circonferenza

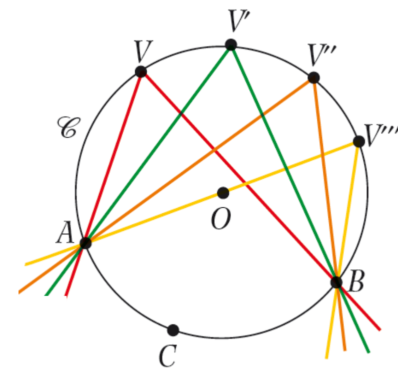
## RELAZIONI FRA ANGOLI AL CENTRO E ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA

Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro:

$$A\hat{V}B = \frac{1}{2}\,A\hat{O}B$$

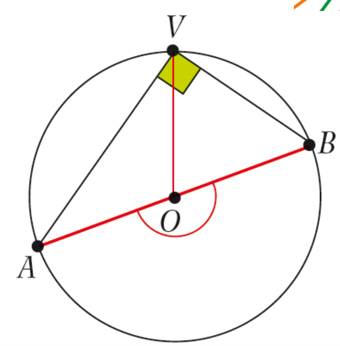



Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti. Angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti.




Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è un **angolo retto**.

$$A\hat{V}B = \frac{1}{2}\,A\hat{O}B = \frac{1}{2}\,180° = 90°$$

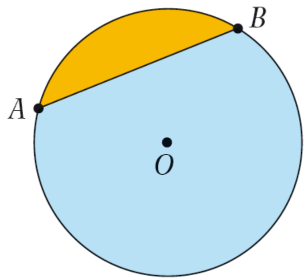



In ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa stessa. Il triangolo *AVB*, rettangolo in *V*, ha la mediana *VO* relativa all'ipotenusa uguale al raggio e l'ipotenusa *AB* uguale al diametro:

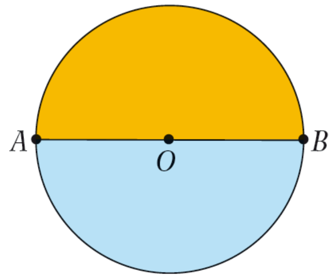
$$VO = \frac{1}{2}AB$$

# Il cerchio e le sue parti

Una corda *AB* divide un cerchio in due parti ciascuna delle quali si chiama **segmento circolare a una base**.

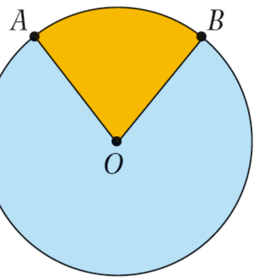



Un diametro divide un cerchio in due parti congruenti ciascuna delle quali è detta **semicerchio**.




Ciascuna delle due parti di cerchio delimitata da due raggi *OA* e *OB* è detta **settore c**ircolare.

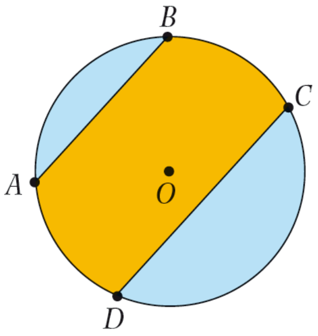
L'ampiezza dell'angolo al centro è l'ampiezza del settore circolare.



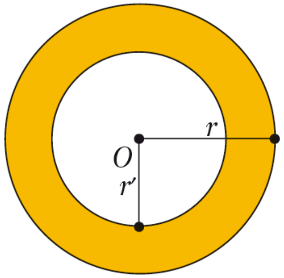
# Il cerchio e le sue parti

Due corde parallele dividono il cerchio in tre parti.

La parte di cerchio compresa tra le due corde è detta **segmento circolare a due basi**.




La parte di piano limitata da due circonferenze concentriche è detta **corona circolare**.



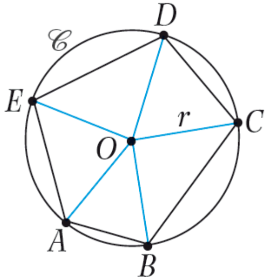
# Poligoni inscritti in una circonferenza

**Un poligono si dice inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza. La circonferenza si dice circoscritta al poligono.**

Consideriamo un generico poligono *ABCDE* inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$.
I vertici appartengono alla circonferenza e sono quindi equidistanti dal centro:

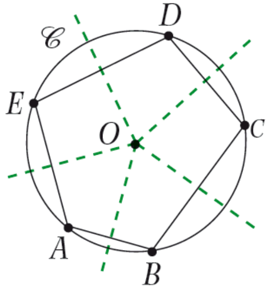
$$OA = OB = OC = OD = OE = r$$

Il raggio della circonferenza circoscritta è detto **raggio del poligono**.

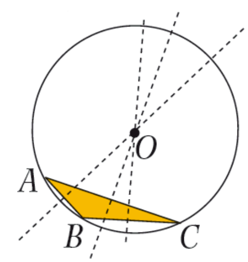



Tracciamo, in verde, gli **assi** dei lati del poligono: il centro di $\mathcal{C}$ coincide con il punto di incontro degli assi delle corde che formano il poligono *ABCDE* ed è detto **circocentro**.

**Un poligono si può inscrivere in una circonferenza solo se gli assi dei suoi lati si incontrano nel punto detto circocentro.**




In ogni **triangolo** gli assi si incontrano sempre in un punto: ogni triangolo è quindi un **poligono inscrivibile in una circonferenza**.



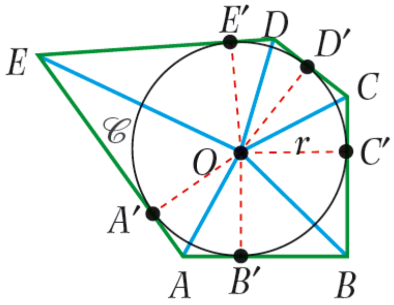
# Poligoni circoscritti a una circonferenza

**Un poligono si dice circoscritto a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. La circonferenza si dice inscritta nel poligono.**

Consideriamo un generico poligono *ABCDE* circoscritto alla circonferenza $\mathcal{C}$. Il lato *AE* è tangente a $\mathcal{C}$, quindi la sua distanza dal centro *OA′* è uguale al raggio:

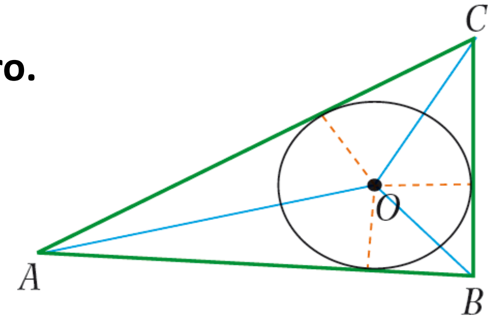
$$r = OA' \qquad \text{e} \qquad OA' \perp AE$$

Il raggio della circonferenza inscritta è detto **apotema**.




Tracciamo, in blu, le **bisettrici** degli angoli del poligono, esse sono equidistanti dai lati e il loro punto di incontro, chiamato **incentro**, sarà equidistante da tutti i lati e quindi coinciderà con il centro della circonferenza inscritta nel poligono.

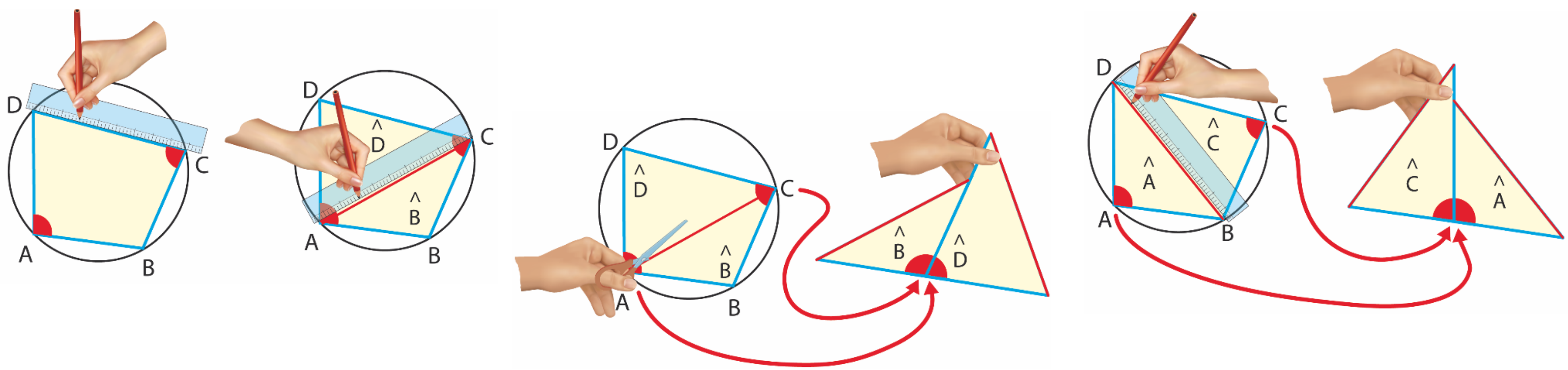
**Un poligono si può circoscrivere a una circonferenza solo se le bisettrici dei suoi angoli si incontrano tutte nel punto detto incentro.**




In ogni **triangolo** le bisettrici si incontrano sempre in un punto: ogni triangolo è quindi un **poligono circoscrivibile a una circonferenza**.

# Quadrilateri inscritti e circoscritti a una circonferenza

## QUADRILATERI INSCRITTI IN UNA CIRCONFERENZA




**In un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari cioè la loro somma è un angolo piatto.**

Vale anche la proprietà inversa:

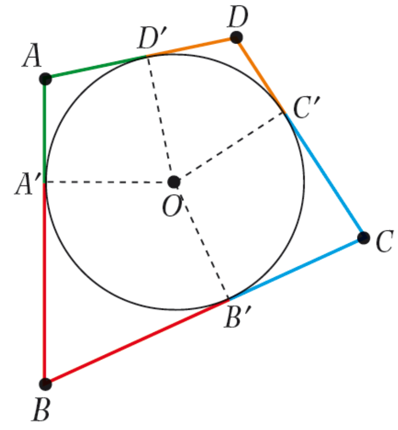
**Se un quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari allora è inscrivibile in una circonferenza.**

Il rettangolo, il quadrato e il trapezio isoscele sono sempre inscrivibili.

# Quadrilateri inscritti e circoscritti a una circonferenza

## QUADRILATERI CIRCOSCRITTI A UNA CIRCONFERENZA

$\overline{AD'} = \overline{AA'}$; $\overline{A'B} = \overline{BB'}$; $\overline{B'C} = \overline{CC'}$; $\overline{C'D} = \overline{DD'}$




Come si può notare dai colori è possibile scomporre la somma di due lati opposti:

$$\overline{AD} + \overline{BC}$$

$$\overline{AD'} + \overline{DD'} + \overline{BB'} + \overline{B'C}$$

$$= \quad = \quad = \quad =$$

$$\overline{AA'} + \overline{C'D} + \overline{A'B} + \overline{CC'}$$

$$\overline{AB} + \overline{DC}$$

**In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.**

Vale anche la proprietà inversa:

**Se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, allora il quadrilatero è circoscrivibile a una circonferenza.**

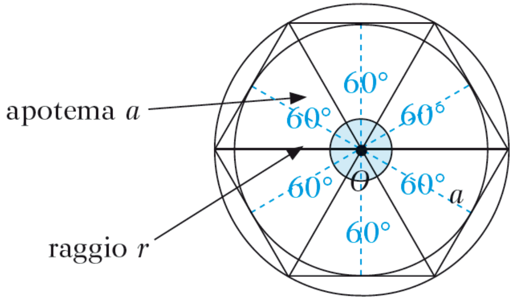
Il quadrato e il rombo sono sempre circoscrivibili.

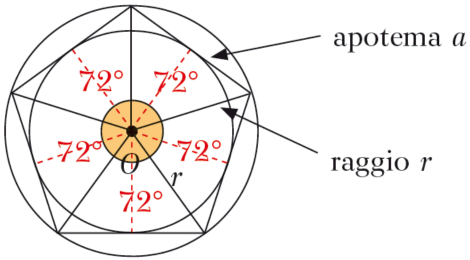
# Poligoni regolari e relazioni tra lato, apotema e raggio

Un **poligono regolare** è un poligono che ha tutti gli **angoli congruenti** (**equiangolo**) e tutti i **lati congruenti** (**equilatero**).

In ogni poligono regolare:

- gli assi si intersecano tutti in uno stesso punto detto **circocentro**;
- le bisettrici si intersecano tutte in uno stesso punto detto **incentro**;
- i due punti di intersezione coincidono e il punto è detto **centro** del poligono.




**Ogni poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile a due circonferenze concentriche.**

Il **raggio di un poligono regolare** è il raggio della circonferenza circoscritta, quindi la distanza del centro *O* da un vertice e si indica con *r*.

L'**apotema di un poligono regolare** è il raggio della circonferenza inscritta, quindi la distanza del centro *O* da un lato e si indica con *a*.

# Poligoni regolari e relazioni tra lato, apotema e raggio

## QUADRATO

La **misura del lato del quadrato inscritto in una circonferenza** si ottiene moltiplicando la misura del raggio per $\sqrt{2}$:

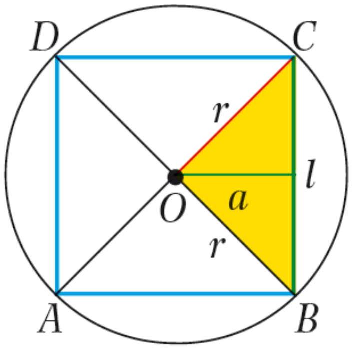
$$\boldsymbol{l = r \cdot \sqrt{2}}$$

Possiamo inoltre notare che:

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2} l}$$

cioè

$$\boldsymbol{a = 0{,}5 \cdot l}$$



# Poligoni regolari e relazioni tra lato, apotema e raggio

**ESAGONO REGOLARE**

La **misura del lato di un esagono regolare inscritto in una circonferenza** è uguale alla misura del raggio:

$\boldsymbol{l = r}$

Ricordando che $h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$

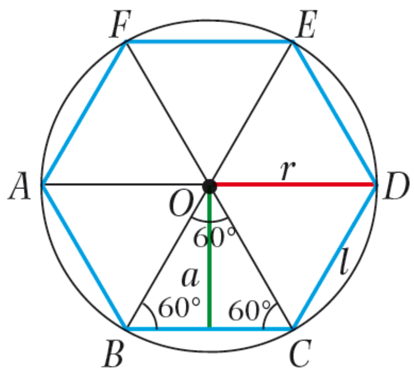
poiché $h = a$

si ottiene:

$$\boldsymbol{a = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}}$$

cioè

$\boldsymbol{a = l \cdot 0{,}866}$





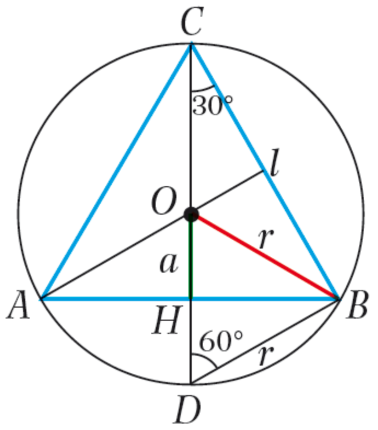

Lattes

# Poligoni regolari e relazioni tra lato, apotema e raggio

## TRIANGOLO EQUILATERO

La **misura del lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza** si ottiene moltiplicando la misura del raggio per $\sqrt{3}$ :

$$\boldsymbol{l = r \cdot \sqrt{3}}$$




Nel triangolo equilatero altezza, mediana, bisettrice e asse coincidono. Il loro punto di incontro *O* può essere considerato il baricentro della figura per cui:

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}} \qquad \text{cioè} \qquad \boldsymbol{a = l \cdot 0{,}288}$$

# Poligoni regolari e relazioni tra lato, apotema e raggio

**L’apotema di un poligono regolare si calcola moltiplicando la misura del lato per un numero fisso.**

Per gli altri poligoni regolari il calcolo è laborioso, ecco quindi una tabella riassuntiva dei numeri fissi per cui si deve moltiplicare la misura del lato per calcolare quella dell’apotema:

| poligono regolare | numero fisso ($f$) | poligono regolare | numero fisso ($f$) | poligono regolare | numero fisso ($f$) |
|---|---|---|---|---|---|
| triangolo equilatero | 0,288 | esagono | 0,866 | ennagono | 1,374 |
| quadrato | 0,5 | ettagono | 1,038 | decagono | 1,539 |
| pentagono | 0,688 | ottagono | 1,207 | dodecagono | 1,866 |